

**ZAGADNIENIA NA EGZAMIN POPRAWKOWY Z MATEMATYKI**  
**W KLASIE CZWARTEJ TECHNIKUM po SP**

**I GEOMETRIA ANALITYCZNA**

1. Równanie prostej w postaci ogólnej i kierunkowej
2. Wzajemne położenie dwóch prostych – warunek równoległości i prostokątności
3. Odległość na płaszczyźnie – długość odcinka, odległość punktu od prostej
4. Środek odcinka
5. Równanie okręgu.
6. Wzajemne położenie okręgów
7. Wzajemne położenie prostej i okręgu.
8. Symetria osiowa i środkowa
9. Punkty przecięcia paraboli i prostej

**II. FUNKCJA WYKŁADNICZA I LOGARYTMY**

1. Potęga o wykładniku całkowitym
2. Potęga o wykładniku wymiernym
3. Funkcja wykładnicza jej wykres i własności
4. Pojęcie logarytmu definicja i jej zastosowanie
5. Twierdzenia o logarytmach
6. Własności logarytmów i ich zastosowanie
7. Funkcja logarymiczna jej wykres i własności

**III. CIĄGI LICZBOWE**

1. Określenie ciągu i sposoby jego przedstawiania
2. Ciągi określone rekurencyjnie
3. Własności ciągu
4. Ciąg arytmetyczny – definicja i jej zastosowanie
5. Własności ciągu arytmetycznego
6. Suma  $n$  początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego
7. Ciąg geometryczny – definicja i jej zastosowanie
8. Własności ciągu arytmetycznego
9. Suma  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego
10. Procent składany. Oprocentowanie w bankach.

„Naturalnie, że zdasz”.

## I. GEOMETRIA ANALITYCZNA

1. Przekształcić równanie prostej z postaci kierunkowej do postaci ogólnej

a)  $y = 2x - 5$

b)  $y = \frac{2}{3}x + 4$

c)  $y = -\frac{2}{7}x + \frac{3}{14}$

d)  $y = x - 3$

2. Przekształcić równanie prostej z postaci ogólnej do postaci kierunkowej

a)  $x - 3y + 2 = 0$

b)  $2x - y - 3$

c)  $16x - 8y = 0$

d)  $x + 2y - 4 = 0$

3. Wyznaczyć współczynnik kierunkowy prostej o podanym równaniu ogólnym

a)  $x + y - 3 = 0$

b)  $4x - y + 7 = 0$

c)  $\sqrt{2}x - 5y + 7 = 0$

4. Które ćwiartki układu współrzędnych przecina prosta o podanym równaniu?

a)  $2x - y - 1 = 0$

b)  $-x + 3y + 3 = 0$

c)  $x - 5y = 0$

5. Dla jakich wartości  $m$  prosta o podanym równaniu przecina pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych?

a)  $2x - y + m = 0$

b)  $2x + 5y + 5m = 0$

6. Oblicz odległość punktu  $P$  od początku układu współrzędnych

a)  $P = (-4, 3)$

b)  $P = (2, -5)$

c)  $P = (-3, -9)$

7. Oblicz odległość podanych punktów

a)  $A = (3, 7)$  i  $B = (11, 7)$

b)  $A = (-2, 4)$  i  $B = (5, 5)$

c)  $M = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$  i  $N = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

8. Oblicz obwód trójkąta ABC
- $A = (3,1)$     $B = (4,3)$     $C = (-2,6)$
  - $A = (-2,-2)$     $B = (-1,-7)$     $C = (2,-5)$
  - $A = (-1,-1)$     $B = (-2,3)$     $C = (3,1)$
9. Wykaż, że czworokąt ABCD o wierzchołkach  $A=(-2,-2)$ ,  $B=(6,2)$ ,  $C=(2,5)$ ,  $D=(-4,2)$  jest trapezem prostokątnym. Oblicz obwód, pole oraz długości przekątnych tego trapezu.
10. Oblicz obwód trójkąta, którego boki zawierają się w prostych o podanych równaniach.
- $$x - y = 0, \quad 2x + y - 3 = 0, \quad 3x + y - 7 = 0$$
11. Wykaż, że trójkąt o wierzchołkach  $G = (4,-3)$ ,  $H = (-1,2)$ ,  $L = (7,0)$  jest prostokątny i oblicz jego pole.
12. Oblicz odległość punktu C od prostej AB oraz pole trójkąta ABC
- $A (-3; -1)$ ,  $B (5; -3)$ ,  $C (2; 4)$
  - $A (-2;-2)$ ,  $B (2; 0)$ ,  $C ((4; 0)$
13. Dany jest trójkąt ABC, gdy  $A (-1; 1)$ ,  $B (3; -2)$ ,  $C (2; 3)$  wyznacz:
- równanie prostej zawierającej bok AB
  - równanie wysokości poprowadzonej z wierzchołka C
  - długości wysokości tego trójkąta
  - pole tego trójkąta
14. Oblicz odległość punktów A i B od prostej l. Czy prosta AB jest równoległa do prostej l?
- $A (1; 4)$ ,  $B (5; 5)$  oraz  $l: y = 0,4x - 6$
  - $A (-4; -2)$ ,  $B (2; 6)$  oraz  $l: y = 1\frac{1}{3}x - 5$
15. Oblicz współrzędne środka odcinka AB
- $A=(2,3)$  i  $B = (8,5)$
  - $A = (-1,4)$  i  $B = (-3,-5)$
16. Punkt M jest środkiem odcinka AB. Wyznacz współrzędne punktu B
- $A = (3,4)$  i  $M = (1,7)$
  - $A = (-1,5)$  i  $M = (0,1)$
  - $A = (4,-16)$  i  $M = (-3,-8)$
17. Napisz równanie symetralnej odcinka AB, wiedząc, że  $A = (-1,2)$  i  $B = (3,6)$
18. Podaj równanie okręgu o środku S i promieniu r
- $S (-3; 6)$   $r = 5$
  - $S (0; -3)$  i  $r = \sqrt{7}$
  - $S (0; 0)$  i  $r = 3\sqrt{2}$

19. Podaj współrzędne środka okręgu i jego promień

a)  $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 1$

b)  $x^2 + (y - 3)^2 = 16$

c)  $(x + 1)^2 + (y + 7)^2 = 8$

19. Wyznacz równanie okręgu o środku S przechodzącego przez punkt P

a) S (-3; -1) i P (-1; 3)

b) S (-1; 1) i P (2; 2)

20. Wyznacz równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek AB. Narysuj ten okrąg, gdy:

a) A (1; 2), B (7; 2)

b) A (-2; -3), B (6; -1)

21. Wyznacz równanie okręgu opisanego na

a) trójkącie prostokątnym ABC, gdy A (-4; 1), B (4; -3), C (8; 5)

b) Kwadracie ABCD, gdy A (-3; -1), B (1; -3), C (4; 3), D (0; 5)

22. Ile punktów wspólnych mają okręgi  $K_1$  i  $K_2$ ?

a)  $K_1: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$  oraz  $K_2: (x - 7)^2 + (y - 4)^2 = 5$

b)  $K_1: (x + 3)^2 + (y - 3)^2 = 36$  oraz  $K_2: (x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$

23. Dane są okręgi  $K_1$  i  $K_2$ . Oblicz odległość między środkami tych okręgów i określ ich wzajemne położenie

a)  $K_1: (x - 3)^2 + y^2 = 4$  oraz  $K_2: (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 16$

b)  $K_1: (x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 84$  oraz  $K_2: (x + 5)^2 + (y + 2)^2 = 16$

## II. FUNKCJA WYKŁADNICZA I LOGARYTMY

1. Oblicz wartość wyrażenia:

a)  $\frac{4^3 \cdot 36^2}{4^4 \cdot 2 \cdot 3^4} - \frac{2^7 \cdot 3^4}{6^5}$

e)  $\frac{(0,5)^{\frac{2}{3}} \cdot 16^{-\frac{4}{3}}}{2^{-3}}$

b)  $\frac{5^2 \cdot 25^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{25}}{125^{-1} \cdot \sqrt[6]{5^3}}$

f)  $\frac{2^{1,5} \cdot 9^{\frac{1}{4}}}{\left(\frac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 27^{0,5}}$

c)  $\frac{\sqrt[3]{15} \cdot (2^3 \cdot \sqrt{15})^2}{2^4 \cdot \sqrt[3]{5}}$

g)  $\sqrt{2\sqrt{2}}$

d)  $\left( \left(\frac{4}{7}\right)^{-\frac{2}{5}} \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{3}{5}} \cdot \left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{4}}$

2. Oblicz wartość wyrażenia:

a)  $10^{\log 2} + 5^{\log_5 2}$ ,

e)  $\log_{25} 5$

- b)  $\log_3 6 + \log_3 18 - 2 \log_3 2$                       f)  $\log_8 2$   
 c)  $\log_2 24 - \log_2 3$                                       g)  $\log_{\frac{2}{5}} \frac{25}{4}$   
 d)  $\log_{20} 5 + 2 \log_{20} 2$                                 h)  $\log_{\frac{1}{2}} 2^{-4}$

3. Oblicz wartość funkcji danej wzorem  $f(x) = 3^{x-2} + 1$  dla argumentu:

- a)  $x = 1$     , b)  $x = -1$   
 c)  $x = 0$     , d)  $x = \frac{1}{2}$

4. Dla jakiego argumentu funkcja  $f(x) = (\sqrt{3})^x$  osiąga wartość 3?

5. Naskicuj wykres funkcji  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 1$ . Podaj jej dziedzinę, zbiór wartości, miejsce zerowe oraz określ monotoniczność.

6. Naskicuj wykres funkcji  $y = 2^x$ , następnie przesun go o jedną jednostkę w lewo i jedną jednostkę w dół. Napisz wzór funkcji powstałej w wyniku przesunięcia wykresu funkcji  $f$  oraz określ dla jakich argumentów funkcja przyjmuje wartości ujemne.

7. Dla jakich wartości parametru  $m$  równanie  $2^x - 3 = m$  ma dokładnie jedno rozwiązanie?

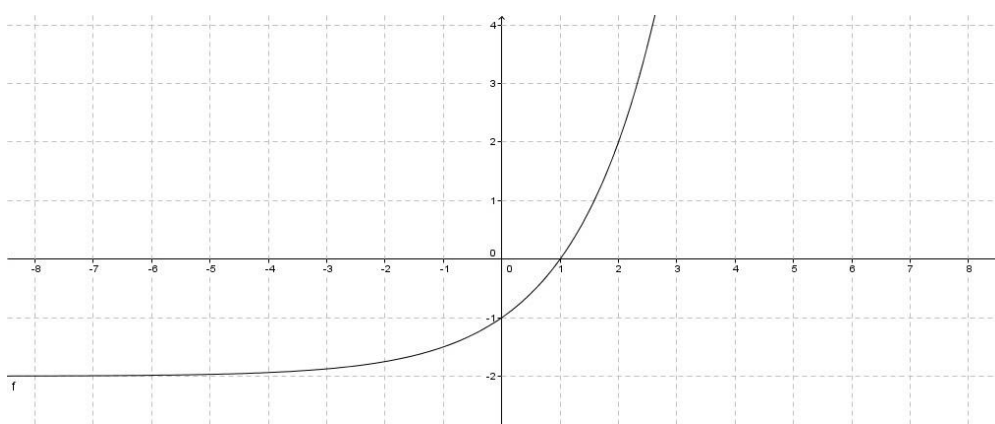
8. Rozwiąż równanie:

- a)  $\log_{\sqrt{5}} x = 2$     , b)  $\log_3 x = \frac{1}{2}$   
 d)  $\log_2 x = -6$     , d)  $\log x = 3$

9. Do wykresu funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(x) = a^x$ , gdzie  $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$  należy punkt(3, 8). Podaj wzór tej funkcji.

10. Do wykresu funkcji  $f$  określonej wzorem  $f(x) = a^x$ , gdzie  $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$  należy punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ . Podaj wzór tej funkcji.

11. Dany jest wykres funkcji  $f(x) = 2^x - 2$ . Podaj jej zbiór wartości oraz rozwiązanie nierówności  $f(x) > 2$ .



### III. CIĄGI LICZBOWE

1. Oblicz piąty wyraz ciągu określonego wzorem

a)  $a_n = \frac{2n-10}{n+1}$

b)  $a_n = \frac{1}{3n+1}$

c)  $a_n = n^2 + 3n + 1$

d)  $a_n = \sqrt{20+n}$

2. Który wyraz ciągu określonego wzorem  $a_n = \frac{n-2}{n+3}$

a) jest równy  $-\frac{1}{4}$ ?

b) jest równy 0 ?

3. Które wyrazy ciągu  $(a_n)$  określonego wzorem  $a_n = n^2 - 8n + 15$  są równe zero?

4. Ile ujemnych wyrazów ma ciąg  $(a_n)$  określony wzorem  $a_n = n^2 - 8n + 15$ ?

5. Oblicz pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ , w którym  $a_7 = 1, a_{11} = 9$ .

6. Oblicz pierwszy wyraz ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ , w którym  $a_3 = 7, a_6 = 13$ .

7. W ciągu geometrycznym  $(a_n)$  dane są  $a_3 = 1$  oraz  $a_6 = \frac{1}{64}$ . Wówczas  $a_1$  i  $q$  wynosi?

8. W ciągu geometrycznym  $(a_n)$  dane są  $a_6 = \frac{1}{64}$  oraz  $q = \frac{1}{4}$ . Oblicz pierwszy wyraz tego ciągu.

9. Oblicz sumę pięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazie ogólnym  $a_n = 6 \cdot (-3)^{n-1}$ .

10. Oblicz sumę trzech początkowych wyrazów ciągu geometrycznego o wyrazie ogólnym  $a_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$ .

11. Oblicz wartość sumy  $21 + 22 + \dots + 49$ .

12. Oblicz wartość sumy  $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 61$ .

13. Oblicz sumę dziewięciu początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego  $(a_n)$ , w którym  $a_1 = 2, r = \frac{1}{2}$ .

14. Dany jest ciąg arytmetyczny  $(a_n)$ , w którym  $a_1 = 3, r = 1$ . Oblicz

a) sumę początkowych pięćdziesięciu wyrazów

b) sumę wyrazów od  $a_{10}$  do  $a_{30}$ .

15. Oblicz sumę dziesięciu początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, w którym  $a_1 = 3, q = -\sqrt{2}$ .

16. Liczby  $x, y, 19$  w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny, przy czym  $x + y = 8$ . Oblicz  $x, y$ .

17. Suma  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  początkowych  $n$  wyrazów ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  określona jest wzorem  $S_n = n^2 - 2n$  dla  $n \geq 1$ . Wyznacz wzór ogólny tego ciągu.

18. Sprawdź, czy ciąg o wzorze ogólnym  $a_n = 2n + 1$  jest ciągiem arytmetycznym.

19. Sprawdź, czy ciąg o wzorze ogólnym  $a_n = (\sqrt{3})^n$  jest ciągiem geometrycznym.

20. Dla jakich wartości  $x$  liczby  $x - 3$ ,  $x + 1$ ,  $4x - 2$  są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?
21. Dla jakich wartości  $x$  liczby  $4x^2 - 1$ ,  $6x + 1$ ,  $x^2 + 7$  są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego?
22. Dla jakich wartości  $x \in \mathbb{N}$  liczby  $x + 1$ ,  $4x + 1$ ,  $10x + 7$  tworzą ciąg geometryczny?
23. Dla jakich wartości  $m$  liczby postaci  $2m - 1$ ,  $3m$ ,  $m^2 + 1$  (w podanej kolejności) tworzą ciąg arytmetyczny?
24. Zbadaj monotoniczność ciągu  $(a_n)$  o wzorze ogólnym:
  - a)  $a_n = 3n - 10$
  - b)  $a_n = -n^2 + 4n + 2$
25. Ciąg  $(12, x, y)$  jest arytmetyczny, zaś ciąg  $(12, y, x)$  jest geometryczny. Wyznacz  $x, y$ .
26. Marek wpłacił do banku 2000zł na lokatę oprocentowaną 4% w skali roku. Oblicz stan konta Marka po upływie 3 lat, jeżeli bank oferuje kapitalizację roczną.
27. Jaką kwotę należy wpłacić na lokatę oprocentowaną 1% w skali roku, aby po trzech latach oszczędzania wypłacić 3000zł, jeśli kapitalizacja odsetek następuje po roku? Czy jest to opłacalne?
28. Składamy 1000zł w banku oferującym 20% rocznie z roczną kapitalizacją. Po ilu latach kwota oszczędności przekroczy 2000zł?
29. Cezary wpłacił do banku 3000 zł. Oprocentowanie wynosi 6% rocznie, a kapitalizacja odsetek następuje co kwartał. Ile pieniędzy będzie miał Cezary po roku oszczędzania?
30. Mateusz uczył się słówek z języka obcego. Zaczął od 40 i każdego następnego dnia zmniejszał liczbę słówek o 2. Czy w ten sposób opanował 300 słówek? Jeśli tak, to po ilu dniach?
31. W każdym z 8 wielkich pudełek jest 8 dużych pudełek. W każdym dużym pudełku jest 8 średnich pudełek. W każdym średnim pudełku jest 8 małych pudełek, a w każdym, małym pudełku jest 8 malutkich pudełek. Ile jest wszystkich pudełek ?